2005年度 pp.1-14

K3曲面のEnriques商の個数について

京都大 理　大橋 久範
e-mail : pioggia@kurims.kyoto-u.ac.jp

§ 定義

X, Y はコンパクトkähler複素二次元多様体とする.

・X が　$K_X \sim 0$, $\pi_1(X) = 1$ をみたすとき、
　これを K3曲面 という.

・Y が　$2K_Y \sim 0$, $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ をみたすとき、
　これを Enriques 曲面 という.

Enriques曲面とは、K3曲面を自由対合で割って得られる曲面のこと、と言っても同じである。

§ 主定理

Enriques曲面のモジュライ空間は、その被覆K3曲面の周期を経由して構成される。だが逆に、K3曲面の同型類から得られるEnriques曲面は

高々一つとは限らない。以下の定理は、この対応関係に関するものである。

定理1 任意の自然数nに対して、nよりも多くの非同型なEnriques商をもつK3曲面が存在する。

この定理におけるK3曲面は周期の存在はわかるものの、具体的な表示は与えられていない。

定理2 K3曲面Xに対して、$\mathrm{Aut}(X)$の中の位数有限の元のなす共役類の個数は、有限である。

系 Xのもつ、非同型なEnriques商は有限個。

注 K3曲面Xで、非同型な2つのEnriques商を持つものの最初の例は、金銅[1]により与えられた。

定理1の証明では、周期を用いて与えられたK3曲面XのNeron-Severi格子$NS(X)$の情報から、XのEnriques商の数え上げを行う。同じ方法が積型のKummer曲面について適用できる。

定理3　積型Kummer曲面Xの周期が、十分一般の位置にあると仮定する。このときXはちょうど15個の非同型なEnriques商をもつ。これらはLieberman対合，金銅-向井対合において適当なパラメータをとることにより全て構成できる。

上に挙げた二種類の対合については、後の§で説明する。

§ Enriques 商を数える方法.

・まず次の対応に注意する。

$$\{\text{Enriques 商の同型類}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\mathrm{Aut}(X)\text{ の中の共役類}\\ \text{で、自由対合からなるもの}\end{array}\right.$$

これは、X の Enriques 商 Y の自己同型が つねに X に持ち上がることからわかる。

・Torelli の定理を用いて、自由対合 ι とその $H^2(X,\mathbb{Z})$ への作用を同一視する。さらに、ι が位数 2 であることから、この作用は 固定される部分格子 $M \subset H^2(X,\mathbb{Z})$ で決まる。

このことから、以降、M から定まる $H^2(X,\mathbb{Z})$ の 対合を $\iota = \iota_M$ と書くことにする。

・自由対合の固定部分 M について次の事実を使う。

(A) M は $U(2) \oplus E_8(2)$ に同型な $NS(X)$ の原始的部分格子である。

(B) $M^{\perp} \cap NS(X)$ は 長さ -2 の元を含まない.

(C) M は豊富因子を含む.

逆に上の (A) − (C) をみたす $NS(X)$ の部分格子 M が与えられたとき、i_M は自由対合から引き起こされていることが Torelli の定理からわかる。

- $g \in Aut(X)$ による共役関係 $g i_{M_1} g^{-1} = i_{M_2}$ は. $g(M_1) = M_2$ と同じことである。従って問題は「(A)〜(C) をみたす M の全体の中で. $Aut(X)$ によりうつり合わないものの個数」を求めることになる。これは. $NS(X)$ の格子としての自己同型群 $O(NS)$ を 中間 にはさむことにより. 計算できる形の表示式が 得られる。

$$\mathfrak{M} = \left\{ M \subset NS \;\middle|\; \text{上の (A), (B) をみたす部分格子} \right\}$$

とおく。これには $Aut(X)$ だけでなく $O(NS)$ 全体が作用できる。$O(NS) \curvearrowright \mathfrak{M}$ の作用の完全代表系を $M_1, \cdots, M_k \in \mathfrak{M}$ とおく。

公式　$j=1,2,\cdots,k$ に対し、

$$K^{(j)}=\{\varphi\in O(NS)\mid \varphi(M_j)=M_j\}$$

とおき、この $K^{(j)}$ の、標準的な準同型

$$\sigma:\ O(NS)\longrightarrow O(q_{NS})$$

による像を $\sigma(K^{(j)})$ とおく。このとき、

$$B_0=\sum_{j=1}^{k}\#\left(O(q_{NS})/\sigma(K^{(j)})\right)$$

について、

(1) X の非同型な Enriques 商の個数は高々 B_0 個である。

(2) X について、$\underbrace{\sigma\text{ が全射}}_{①}$ かつ $\underbrace{\mathrm{Aut}(T_X,\omega_X)=\{\pm\mathrm{id}\}}_{②}$

と仮定すると、X はちょうど B_0 個の非同型な Enriques 商をもつ。

(記号について：・q_{NS} は非退化格子 $NS(X)$ の判別形式を表す。[3] 参照。
・$T_X=NS(X)^{\perp}\subset H^2(X,\mathbb{Z})$ は超越格子
・$\omega_X\in T_X\otimes\mathbb{C}$ は X の周期)

証明にはWeyl群に関する事実が用いられる.

定義 • $O(NS)$の中で、長さ -2 の元に関する鏡映全体から生成される部分群を W_X と書き. X のWeyl群という

• $O(NS)$の元で, 有効因子の全体を保つもののなす部分群を $O^+(NS)$ と書く.

このとき、$O(NS)$は次のように分解される.

$$O(NS) = \{\pm 1\} \times W_X \rtimes O^+(NS)$$

$O^+(NS)$は. $O(NS)$の中で豊富因子を豊富因子にうつすもの全体と一致することに注意すると、前ページの公式はこの分解を用いて単純な計算を繰り返すことで得られる。

注 (2)の条件②は. X の周期が十分一般の位置にあればなりたつ。

§ 定理1について.

計算はとばして、結果だけ書く。Xの周期は十分一般の位置にあるとする。

<u>場合I</u> $NS(X) \cong U(2) \oplus E_8(2) \oplus \langle -2N \rangle$

$N \geqq 2$, $2N = 2^e p_1^{e_1} \cdots p_\ell^{e_\ell}$ の場合.

$$B_0 = \begin{cases} 2^{\ell-1} & (e=1) \\ (2^5+1)\,2^{\ell+4} & (e=2) \\ 2^{\ell+10} & (e \geq 3) \end{cases}$$

<u>場合II</u> $NS(X) \cong U \oplus E_8(2) \oplus \langle -4M \rangle$

$M \geqq 1$, $4M = 2^e p_1^{e_1} \cdots p_\ell^{e_\ell}$ の場合

$$B_0 = \begin{cases} 1 & (e=2,\ \ell=0) \\ 2^{\ell-1} & (e=2,\ \ell>0) \\ 2^{2\ell+5} & (e \geq 3) \end{cases}$$

つまり、すべての $\ell \geq 0$ に対し、(例えば) $2^{\ell+10}$ 個のEnriques商をもつK3曲面Xが存在する。

§ 積型の Kummer 曲面の場合

まず、向井による [1] の例の一般化を紹介する。

構成：2つの楕円曲線 C_1, C_2 から アーベル曲面 $A = C_1 \times C_2$，商 $\overline{X} = A/\{\pm 1\}$ をつくる。$\overline{X}$ の最小特異点解消 X は K3 曲面であり、積型の Kummer 曲面と呼ばれる。

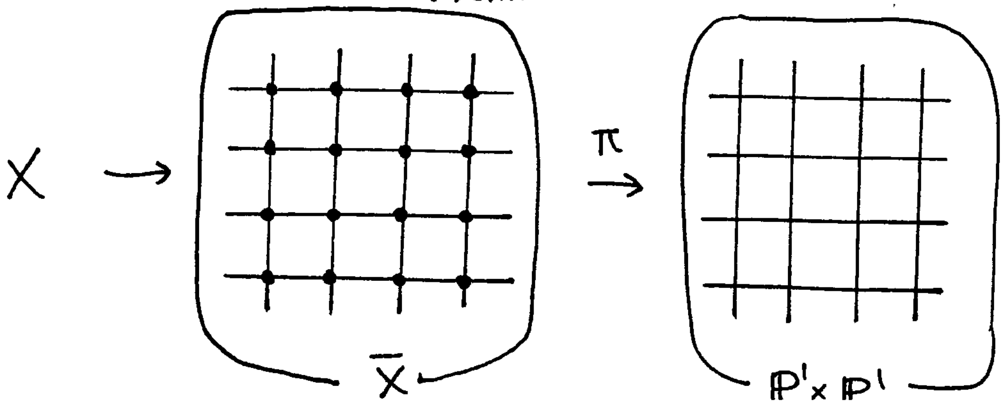
2つの射影 $pr_i : A \to C_i$ は $\{\pm 1\}$ による商と可換なので、自然に $\pi : \overline{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ なる

$$\left(\mathbb{P}^1 = C_i/\{\pm 1\} \right)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & X \arrow[dl] \\ \overline{X} & \end{tikzcd}$$

次数2の写像を引き起こす。これは $\overline{X}$ を経由し、$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の $(4,4)$ 因子に沿って分岐する。(図)

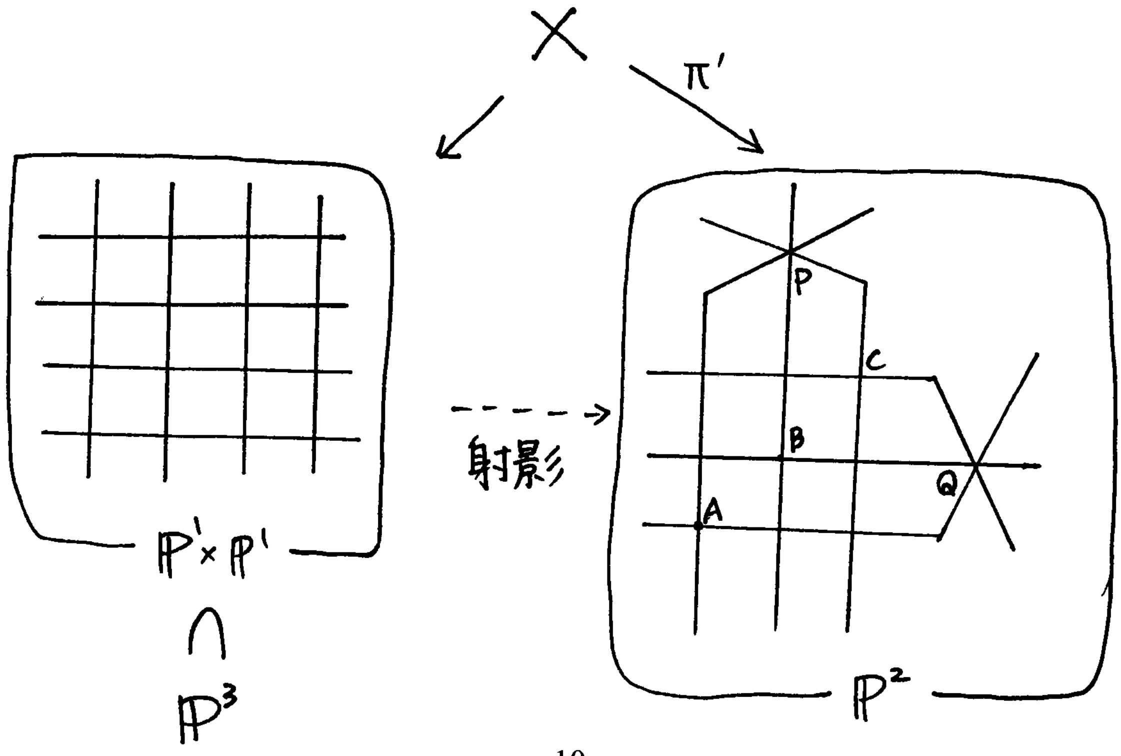
・は A_1 特異点



ここで、C_i の位数2以下の点を $(c_0^{(i)}=0, c_1^{(i)}, \cdots, c_3^{(i)})$
とおいたとき、図の8本の直線は A上の8本の
楕円曲線 $C_1 \times \{c_i^{(2)}\}$, $\{c_i^{(1)}\} \times C_2$ $(i=1,2,3,4)$
の像を表している。

• Lieberman対合：π の被覆変換を σ とおく。
Aの点 $c=(c_i^{(1)}, c_j^{(2)})$ $(i,j \geq 1)$ をとり、これによる
平行移動を $c: X \to X$ とおく。このとき σc は自由対合

• 金銅-向井対合：上で出た $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を $\mathbb{P}^3$ の二次
超曲面とし、これを図の16個の交点のうちの一つ
(右上の点とする) から $\mathbb{P}^3$ の超平面 $\cong \mathbb{P}^2$ の上に射影する。



π'は、$\mathbb{P}^2$の6本の直線で分岐する二重被覆に、特異点解消を合成したものである。(図)

P、Qは射影によって縮約される2本の直線の像とする。σ'をπ'の被覆変換とする。

いま、$\mathbb{P}^2$の Cremona変換 $c' : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}\right)$ で図のA, B, Cを中心としPとQを入れ替えるものが唯一つ決まる。すると $\sigma' c'$ は自由対合である。■

はじめの楕円曲線を十分一般にとった場合、

$$NS(X) \cong U \oplus E_8 \oplus D_4^{\oplus 2}$$

となる。定理3は、「公式」を用いてEnriques商の個数が15個であることをまず示し、次に上述の2種類の対合が、パラメータを含めると15個のEnriques商を表すことを示す、という方法で示される。

以下、「公式」を適用しようとする際の重要な

ステップとなる「$M \in \mathfrak{M}_S$ の、NSの中での直交補空間の決定」について述べる。

> **主張** $M = U(2) \oplus E_8(2)$ が $S = U \oplus E_8 \oplus D_4^{\oplus 2}$ に原始的に埋め込まれていて、$M^{\perp} = K$ が長さ -2 の元をもたないとしたら、$K \cong E_8(2)$

Mにより定まるEnriques曲面 Y が、$H^2(Y, \mathbb{Q})$ に自明に作用する対合をもつことに注意すると、この主張は[4]の中の補題からわかるが、判別形式を用いて直接計算する方法もあり、適用例を少しだけ増やせる利点もあるので、これを紹介する。

(証明)

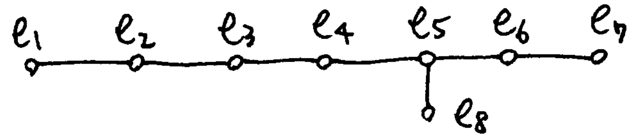
まず、判別形式 $q_S \cong u(2)^{\oplus 2}$, $q_M \cong u(2)^{\oplus 5}$ ($u(2) = q_{U(2)}$) がともに整数値をとるから、q_K も整数値の形式である。従って、有限二次形式の分類から $q_K \cong u(2)^{\oplus a} \oplus v(2)^{\oplus b}$ $(b = 0, 1)$ とかける ($v(2) = q_{D_4}$、[3]参照)。

有限二次形式の、8を法とする符号数を確かめると、sign. $q_K = 0$ より

$$q_K \cong u(2)^{\oplus a} \quad (a = 0, 1, 2, 3)$$

のどれかである。どの場合にも、Kは E_8 の中に有限指数で入っていることがわかる。

一方、E_8 の基底を下図のようにとる。



E_8 の元 $f_0 = 0$, $f_j = e_1 + \cdots + e_j$, $1 \le j \le 7$

, $f_8 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 5e_4 + 6e_5 + 4e_6 + 2e_7 + 3e_8$

を考えると、すべての差 $f_i - f_j$ は長さ -2 をもつ。

Kは長さ -2 の元をもたないことから、f_i はどの2つも、Kを法として合同でないことがわかり、

$[E_8 : K] \ge 9$ が得られ、$q_K \cong u(2)^{\oplus 4}$ となる。

従って、$K(\frac{1}{2})$ は整数値の格子であることがわかり、

$K(\frac{1}{2}) \cong E_8$, $K \cong E_8(2)$ がわかる。 ▨

参考文献

[1] Kondo, S. , Enriques surfaces with finite automorphism groups, Japan. J. Math., 12 (1986), 192-282

[2] Nikulin, V.V., Finite automorphism groups of kähler K3 surfaces (English translation), Trans. Moscow Math. Soc. Issue 2 (1980), 75-137.

[3] Nikulin, V.V., Integral bilinear forms and some of their applications (English translation), J. Soviet Math. ,22 (1983), 1401-1476

[4] Mukai, S., Namikawa, Y., Automorphisms of Enriques surfaces which act trivially on the cohomology groups Invent. Math., 77 (1984), 383-397